

部分平均 Navier-Stokes 方法模拟 超声速斜面空腔流动

罗大海, 阎超, 王小永

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 采用部分平均 Navier-Stokes (PANS) 方法对超声速斜面空腔流动进行了数值模拟研究, 评估其对于超声速非定常湍流模拟的性能, 并与雷诺平均 N-S(RANS), 脱体涡模拟 (DES) 的计算结果及实验数据进行对比. 研究表明: 模化湍动能比例全场可变的 PANS 方法预测的速度、壁面压力和摩擦力系数分布与 DES 的结果非常接近, 都与实验值吻合得较好, 优于 RANS 的计算结果; 非定常雷诺平均 N-S(URANS) 计算的自由剪切层近乎为二维稳态的, 而 DES 和 PANS 方法可以求解出更为丰富的流动结构; 模化湍动能比例全场统一的 PANS 方法虽然可以求解出相比 RANS 更多尺度的流动结构, 但在近壁区不能回归到 RANS 模型, 预测的湍流边界层的速度型偏离对数律, 后续的流动计算也偏离实验数据.

关 键 词: 超声速流动; 斜面空腔; 模化湍动能比例; 脱体涡模拟; 部分平均 Navier-Stokes 方法

中图分类号: V211

文献标志码: A

Partially averaged Navier-Stokes method for simulation of supersonic flow over a ramped-cavity

LUO Da-hai, YAN Chao, WANG Xiao-yong

(School of Aeronautic Science and Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Partially averaged Navier-Stokes (PANS) model was adopted to numerically investigate the supersonic ramped-cavity flow. The objective of current study is to assess the capability of PANS method in the prediction of unsteady supersonic turbulent flow. Comparison of PANS, Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) and detached eddy simulation (DES) results with the available experimental data shows that: (1) velocity profiles, wall-pressure and skin-friction coefficient distributions predicted by PANS model with variable unresolved-to-total ratio of kinetic energy are consistent with DES results; and (2) both of PANS results with variable unresolved-to-total ratio of kinetic energy and DES results are in good agreement with the experimental data and superior to those predicted by RANS; and (3) unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes (URANS) model predicts two dimensional steady geometries of free shear layer, while DES and PANS resolve more abundant flow structures; and (4) PANS model with constant unresolved-to-total ratio of kinetic energy cannot return to RANS model in the near-wall region despite it can resolve more scales of motion compared with RANS; and the predicted velocity profiles of upstream turbulent boundary layer mismatch the log law, thus downstream flow simulation deviates a lot from the experiment.

Key words: supersonic flow; ramped-cavity; unresolved-to-total ratio of kinetic energy; detached eddy simulation; partially averaged Navier-Stokes method

斜面空腔外形是高超声速飞行器推进装置的典型部件,通过合理设计用于保证燃烧的稳定性.超声速斜面空腔流动十分复杂,包含湍流边界层,自由剪切层,回流区,激波和再附边界层.准确预测斜面空腔流动,认识其流动规律对于超声速飞行器发动机的设计具有重要的意义.

由于空腔内壁压力波的反射,空腔流动呈现出大尺度的非定常分离流动结构.传统的数值模拟手段雷诺平均 Navier-Stokes (Reynolds averaged Navier-Stokes, RANS) 方法,对于大范围的分离流动预测较为困难,其模型自身过高的涡黏性限制了自由剪切层的发展^[1].大涡模拟 (large eddy simulation, LES) 相比 RANS 可以求解出更多的湍流结构,获得更为准确的结果,但对于高雷诺数壁湍流的模拟需要耗费巨大的计算资源^[2],如槽道流动的 LES 研究中 50% 以上的网格需要布置在近壁区域^[3].RANS/LES 混合方法是近年来兴起的一类新的湍流模拟方法,其基本思想是,近壁区的小尺度运动采用 RANS 方法来模拟,同时耦合 LES 方法来计算外区的大尺度运动.RANS/LES 混合方法既提高了 RANS 的模拟精度,同时又减小了 LES 所需的计算量,结合了 RANS 和 LES 两者各自的优势,因此得到了越来越多的工程应用^[4-5].

目前发展的 RANS/LES 混合方法种类繁多,其中比较有代表的有:Spalart 等^[6]提出的脱体涡模拟方法(detached eddy simulation, DES),Menter 等^[7]提出的尺度自适应模拟方法(scale-adaptive simulation, SAS),Girimaji 等^[8]提出的部分平均 Navier-Stokes (partially averaged Navier-Stokes, PANS) 方法,以及 Schiestel 等^[9]提出的部分积分输运模型(partially integrated transport model, PITM)等.本文采用 Girimaji 等提出的 PANS 方法来模拟超声速斜面空腔流动,评估其在超声速非定常湍流数值模拟中的性能,并与 DES 的模拟结果及实验数据^[10]进行比较.

PANS 模型对速度场的分解基于湍动能,模型的滤波宽度取决于模化湍动能比例 f_k 和模化耗散率比例 f_ϵ .这两个控制参数^[11].当 f_k 和 f_ϵ 取值为 1 时,PANS 模型回归到 RANS 求解;当 f_k 和 f_ϵ 取值趋于 0 时,PANS 方法趋于直接数值模拟 (direct numerical simulation, DNS);调节 f_k

和 f_ϵ 的取值,PANS 方法可以从 RANS 连续过渡到 DNS^[12].PANS 作为一种 RANS 与 DNS 之间的过渡方法,与 DES 一样,对于非定常湍流的模拟,可以表现出类似于 LES 的求解特性.PANS 方法在圆柱绕流^[13-14],跨声速空腔流动^[15]及绕起落架流动^[16]模拟中的成功应用表明,PANS 对于复杂流动模拟具有工程应用前景.

1 模型描述

DES 方法基于 RANS 方程,通过比较 RANS 长度尺度和网格尺度来重新定义模型的长度尺度,其 RANS 区的计算到 LES 区的计算是通过 RANS 长度尺度与网格尺度的切换来实现的.PANS 方法也是基于 RANS 方程,同时引入了两个控制参数 f_k 和 f_ϵ .控制参数 f_k 和 f_ϵ 定义如下:

$$f_k = \frac{k_u}{k}, f_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon} \quad (1)$$

其中 k_u 和 ϵ_u 分别是模化的湍动能和模化的耗散率, k 和 ϵ 分别是总的湍动能和总的耗散率. f_k 和 f_ϵ 所起的作用类似于 LES 计算中的截断波数^[11].PANS 方法的具体介绍及模型方程的推导参考文献[8,11-12,17].

本文采用的 PANS 方法基于 Menter 的 $k-\omega$ SST 两方程湍流模型^[18-19],原始 SST 模型方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i k)}{\partial x_i} &= P_k - \beta^* \rho k \omega + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \omega)}{\partial x_i} &= \frac{\alpha}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \\ &2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2)$$

SST 模型方程中的各个常数的取值及具体的函数表达式请参考相关的文献[18-19].PANS 模型方程可由 RANS 方程推导而来,最终的形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k_u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i k_u)}{\partial x_i} &= P_{k_u} - \beta^* \rho k_u \omega_u + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_{k_u} \mu_{t_u}) \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\omega_u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i \omega_u)}{\partial x_i} &= \frac{\alpha}{\nu_u} P_{ku} - \beta' \rho \omega_u^2 + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_{\omega u} \mu_u) \frac{\partial \omega_u}{\partial x_i} \right] + \\ &2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega u} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial k_u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \omega_u}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

方程(3)中下标 u 表示 unresolved, σ_{ku} , $\sigma_{\omega u}$, $\sigma_{\omega u}$ 及 β' 不再是原 SST 模型方程中的常数,而是与 f_k 和 f_ε 有关的函数,其具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{ku} &= \sigma_k \frac{f_\omega}{f_k}, \sigma_{\omega u} = \sigma_\omega \frac{f_\omega}{f_k}, \sigma_{\omega u} = \sigma_{\omega u} \frac{f_\omega}{f_k} \\ \beta' &= \alpha \beta^* - \frac{\alpha \beta^*}{f_\omega} + \frac{\beta}{f_\omega}, f_\omega = \frac{f_\varepsilon}{f_k} \end{aligned} \quad (4)$$

可以看出,PANS 模型方程与 RANS 方程非常相似,只是对 RANS 方程中的模型常数做了修改,这对于现有的 RANS 求解器修改模型较为方便. PANS 方法通过调节模化湍动能和模化耗散率的比例,以求解出更多的湍流尺度. 对于高雷诺数流动,含能尺度与耗散尺度具有明显的分界, PANS 方法的计算中通常让 $f_\varepsilon = 1$,而只给定 f_k 的取值^[14]. f_k 可以取定值,也可以随时间和空间变化,本文的 PANS 方法中,随时间和空间变化的 f_k 的分布函数为

$$\begin{aligned} f_k &= \min \left[C_s \left(\frac{l_u}{\Delta} \right) - \frac{2}{3}, 1 \right] \\ l_u &= \frac{\sqrt{k_u}}{\beta^* \omega_u}, \Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中 l_u 为湍流长度尺度,随流场迭代更新变化, Δ 为局部网格尺度, C_s 为模型常数. 在本文的初步研究中 C_s 取值为 0.3, f_k 分布函数的选取参考文献[11].

本文的 DES 计算采用 Strelets^[20] 的 SST DES,以便于与 PANS 方法进行比较, SST DES 模型方程的具体描述参考文献[19-20].

2 计算结果及分析

斜面空腔几何外形及网格如图 1 所示. 空腔深 2.54 cm,底面长 6.19 cm,斜面坡度为 20°. 来流条件:马赫数 $Ma_\infty = 2.92$,压强 $p_\infty = 21240$ Pa,密度 $\rho_\infty = 0.776$ kg/m³,温度 $T_\infty = 95.37$ K,单位雷诺数 $Re = 6.7 \times 10^7$ /m. 计算网格沿 z 方向延伸 3.81 cm,展向长度为空腔深度的 1.5 倍,与文献[21-22]一致,由 $41 \times 56 \times 33$ 和 $166 \times 156 \times 33$ 两个区构成,并在壁面附近及空腔内部区域进行网格加密,网格单元总数 89 万. 壁面附近第一层网格高度为 3×10^{-4} cm,保证 $y^+ < 1$. 空腔展向给

定周期边界条件,出口边界流动物理量由流场内部点插值. 计算区域空腔上游平板区的长度对来流边界层的发展有较大影响,通过不断调整上游平板区长度以保证 $x = -2.54$ cm 处的充分发展的湍流边界层厚度及边界层内速度分布与实验值吻合,即计算的入口条件与实验一致. 本文计算中平板区长度为 22 cm. 数值计算空间离散格式采用 Roe 格式,并使用 5 阶 WENO 方法进行插值,粘性项采用 4 阶中心差分. 非定常时间推进采用双时间步方法,物理时间层采用 2 阶向后差分,伪时间层采用 LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) 隐式时间推进. 在定常计算收敛的流场基础上进行非定常续算,直到流场充分发展后取时间平均进行统计,同时数据进行展向平均,计算时间步长 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-7}$ s.

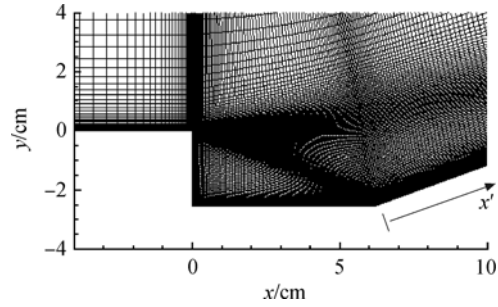


图 1 斜面空腔 x - y 平面网格分布

Fig. 1 x - y grid for ramped-cavity configuration

超声速斜面空腔流动包含多种流动现象:湍流边界层,自由剪切层,回流区,激波和再附边界层. 图 2 为文献[22]给出的瞬时速度场. 定常的 RANS 方法(即便是 URANS)无法预测空腔内部的非定常流动及流场中的小尺度运动.

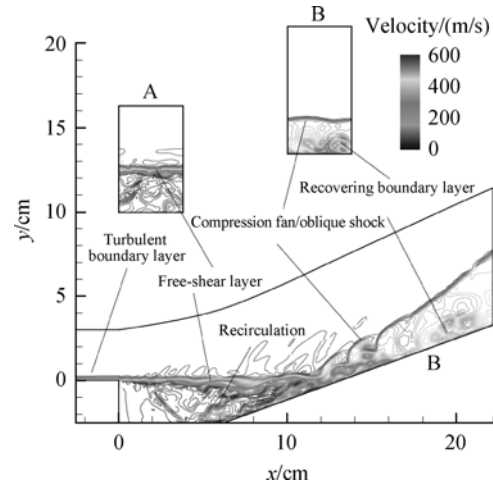


图 2 斜面空腔流动瞬时速度等值线图^[22]

Fig. 2 Instantaneous velocity magnitude contours^[22]

图3是S-A, $k-\omega$ 和 SST 三种湍流模型计算的不同站位速度分布. 其中 $x = -2.54$ cm 对应空腔上游的湍流边界层, $x = 3.81, 6.35, 8.89$ cm 对应自由剪切层的三个不同站位. 对于附着的湍流边界层, 三种湍流模型计算的速度分布与实验值吻合非常好, 而三种湍流模拟都不能很好的预测自由剪切层的速度分布, 其中 $k-\omega$ 模型的结果偏离实验值最大, SST 模型的结果与实验值较为接近, 但仍存在相当的差别.

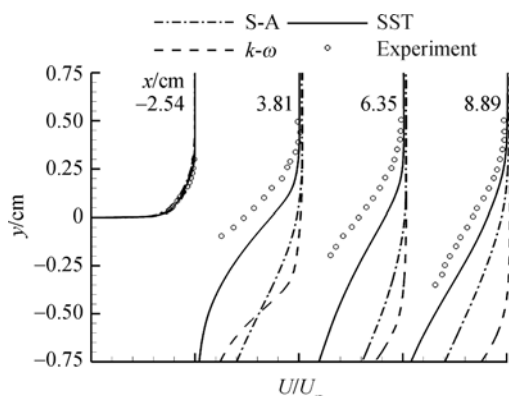


图3 不同站位的流向速度分布(RANS 计算结果)

Fig. 3 Streamwise velocity at four locations using RANS

图4、图5和图6是采用DES方法和PANS方法计算的时均结果. 从图4中湍流边界层及自由剪切层三个不同站位的速度分布看来, DES方法及 f_k 全场可变的PANS方法两者计算结果非常接近, 与实验值都吻合较好, 并明显优于RANS的计算结果, 但 f_k 全场统一 ($f_k = 0.3$ 和 0.5) 的PANS方法计算结果明显偏离实验值, 甚至还不如定常SST模型的计算结果. 即使对于附着的湍流边界层, f_k 全场统一的PANS方法也不能给出正确的速度分布, 计算出的边界层发展厚度明显低于实验值, 导致后续自由剪切层的预测也偏离较大. 图5是DES和PANS计算的壁面压力分布, DES和 f_k 全场可变的PANS方法计算结果与实验值吻合较好, f_k 全场统一的PANS方法计算结果与实验值有所偏离. 从图7的摩擦力系数分布看来, 只有DES和 f_k 全场可变的PANS方法预测结果接近实验值, f_k 全场统一的PANS方法计算的摩擦力系数明显低于实验值.

图7给出了空腔上游 $x = -2.54$ cm 处的速度型. 可以看出, SST DES 和 f_k 全场可变的PANS方法同定常的SST模型一样, 预测的速度型与对数律都吻合很好, 而 f_k 全场统一的PANS方法预测的速度型几乎不满足对数律分布, f_k 取

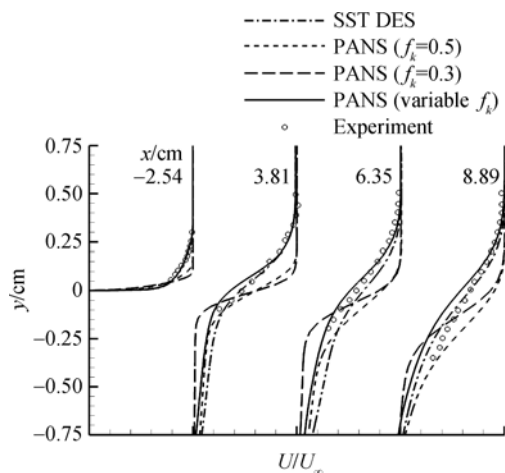


图4 不同站位的流向速度分布(RANS/LES 混合方法计算结果)

Fig. 4 Streamwise velocity at four locations using hybrid RANS/LES

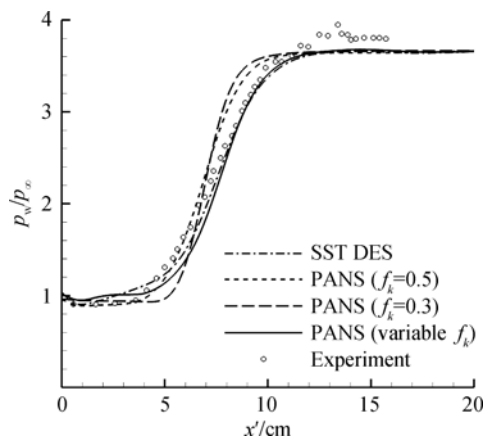


图5 壁面压力分布(RANS/LES 混合方法计算结果)

Fig. 5 Wall-pressure distribution using hybrid RANS/LES

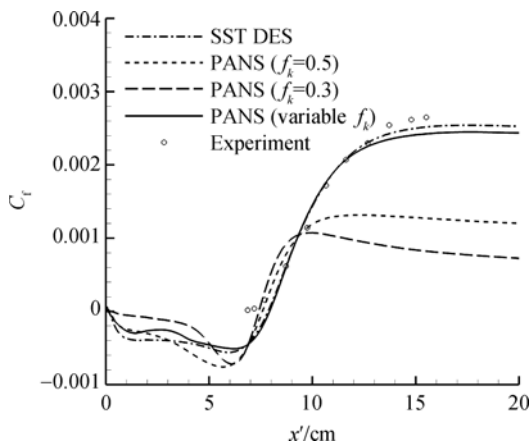
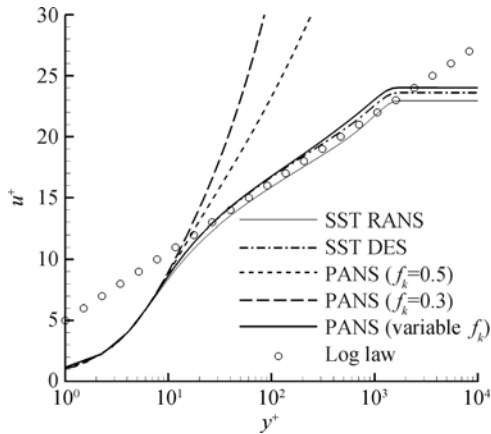


图6 摩擦力系数分布(RANS/LES 混合方法计算结果)

Fig. 6 Skin-friction coefficient distribution using hybrid RANS/LES

图7 $x = -2.54$ cm 处速度型Fig. 7 Velocity profiles at $x = -2.54$ cm

值越小,速度型偏离对数律越大。

图8给出了 f_k 全场可变的 PANS 方法时均的 f_k 分布。在空腔内部的回流区,网格分布较密同时非定常效应显著, f_k 的取值在 0.3 附近;在流动再附区,网格相对稀疏, f_k 的取值在 0.6 左右;近壁区和远场, f_k 的取值为 1, PANS 方法回归到 RANS 模型。

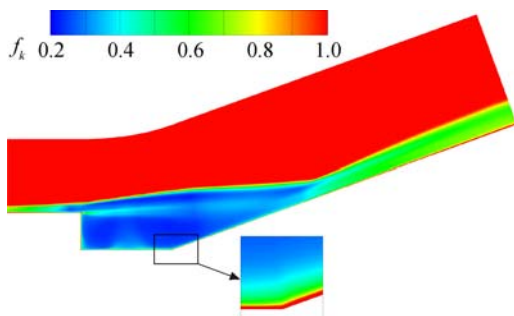
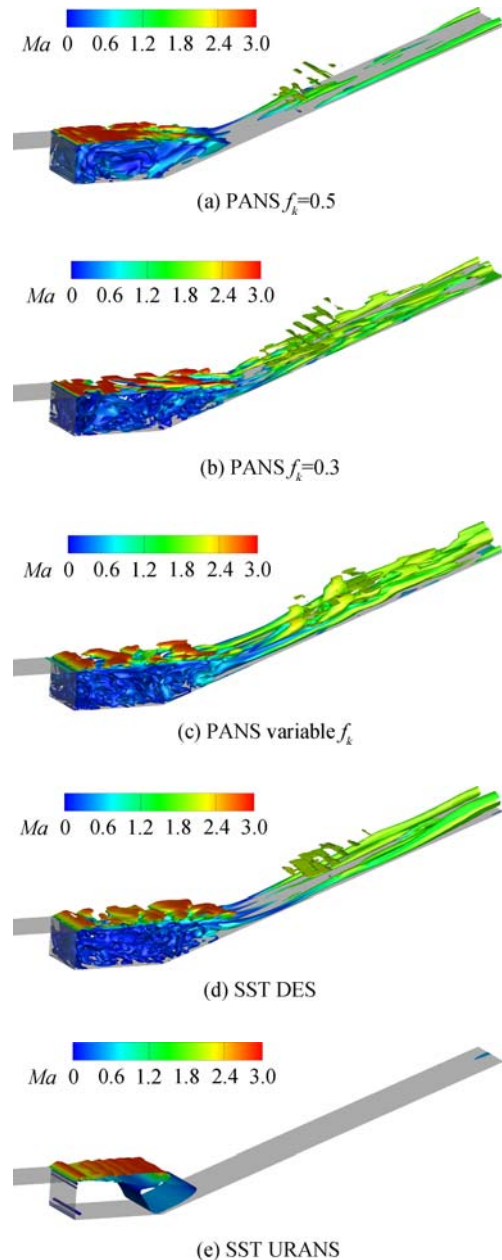
图8 时均的 f_k 分布(f_k 可变的 PANS 方法)Fig. 8 Time-averaged distribution of f_k for PANS simulation with variable f_k

图9显示了采用各种方法得到的瞬时流场结构,以无量纲 Q 等值面显示,并以马赫数 Ma 着色。DES 和 PANS 方法显示了自由剪切层的非定常发展过程及空腔内部回流区小尺度的流动结构,而 SST URANS 方法由于模型自身过高的涡黏性,衰减了流场中的小尺度运动,描述的自由剪切层几乎是二维稳态的,没有求解出更多的三维流动细节。对比 $f_k = 0.3$ 和 0.5 的 PANS 方法计算结果,减小 f_k 的取值,求解出的三维的涡结构明显更为丰富。PANS 方法的计算中,对于给定的网格,更小的 f_k 的取值并不意味着更多流动尺度的求解,反而可能导致数值上的不稳定^[23]。 f_k 全

图9 瞬时 Q 等值面比较($Q=0.01$)Fig. 9 Comparing the instantaneous iso-surface of $Q=0.01$

场可变的 PANS 方法求解出的流动结构在回流区与 DES 方法相当,在再附区比 DES 更为丰富。

通过调节 f_k 的取值, PANS 方法的求解表现出从 RANS 连续过渡到 LES 的性质。但对于给定的网格,最优的 f_k 的取值并不好确定。另一方面,流场的不同区域包含的湍流尺度以及各区网格疏密并不一致,一个合适的做法是让 f_k 随局部网格及当地流场信息变化。此外,在高雷诺数边界层流动中,近壁区存在大量小尺度但对当地流动有着重要影响的涡结构。为了求解这些小尺寸结构, f_k 全场统一的 PANS 方法由于并没有完全对

近壁区流动进行模化,需要在近壁区布置非常密的网格。 f_k 取值越小,模化的湍动能越少,近壁区需要的网格量越大,这也是大涡模拟如果不使用近壁模型计算量难以承受的一个重要原因。 f_k 全场可变的 PANS 方法,由于采用了随局部网格和当地流动信息相关的分布函数,在近壁区 f_k 值限制为 1,这与 DES 方法一样对近壁区流动完全以 RANS 方法模化,因此近壁区所需的网格量与 RANS 相当。在目前近壁区相对稀疏的计算网格下, f_k 全场统一的 PANS 方法未能正确求解近壁区流动,预测的速度型偏离对数律,而 f_k 全场可变的 PANS 方法和 DES 方法由于对近壁区采用 RANS 处理,预测的速度型与对数律吻合较好。目前近壁区的计算网格不足以支持计算选取的 f_k 值,在相对稀疏的计算网格下,近壁区的流动应该尽可能采用 RANS 方法模化而不是求解。

3 结 论

本文采用 RANS,DES 以及 PANS 方法数值模拟了超声速斜面空腔流动,计算结果表明:

1) 对于存在自由剪切层、回流区和再附区的斜面空腔流动,DES 方法和 f_k 全场可变的 PANS 方法给出了明显优于 RANS 模型的计算结果,预测的速度型,壁面压力及摩擦力系数分布与实验数据吻合较好。

2) 即使是采用非定常的 URANS 计算,也无法描述自由剪切层的非定常发展,而 DES 和 PANS 方法可以求解出空腔内部更多的三维非定常的小尺度湍流结构。

3) 对于 f_k 全场统一的 PANS 方法,减小 f_k 的取值,可以求解出更加丰富的三维流动结构,但在近壁区不像 f_k 全场可变的 PANS 方法那样可以回归到 RANS 模型,对于附着的湍流边界层的模拟不能给出正确的速度型分布,预测的边界层厚度明显低于实验值,导致后续的流动计算结果偏离实验值较大。

参考文献:

- [1] Fan T C, Tian M, Edwards J R. Validation of a hybrid Reynolds-averaged large-eddy simulation method for simulating cavity flameholder configurations[R]. AIAA 2001-2929, 2001.
- [2] Pope S B. Turbulent flows[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [3] Kravchenko A G, Moin P, Moser R. Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127(2): 412-423.
- [4] 高瑞泽, 阎超. LES/RANS 混合方法对超声速底部流动的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2011, 37(9): 1095-1099.
GAO Ruize, YAN Chao. LES/RANS hybrid method for supersonic axisymmetric base flow[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 37(9): 1095-1099. (in Chinese)
- [5] Forsythe J R, Squires K D, Wurtzler K E, et al. Detached-eddy simulation of the F-15E at high alpha[J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(2): 193-200.
- [6] Spalart P R, Jou W-H, Strelets M, Allmaras S R, et al. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach[R]. Ruston, Louisiana, U. S. A: Advances in DNS/LES, Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, 1997.
- [7] Menter F R, Kuntz M, Bender R. A scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions[R]. AIAA 2003-0767, 2003.
- [8] Girimaji S S, Srinivasan R, Jeong E. PANS turbulence model for seamless transition between RANS and LES: fixed point analysis and preliminary results[R]. Honolulu, Hawaii, U. S. A: 4th ASME/JSME Joint Fluid Engineering Conference, 2003.
- [9] Schiestel R, Dejoan A. Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2005, 18(6): 443-468.
- [10] Horstman C C, Settles G S, Williams D R, et al. A reattaching free shear layer in compressible turbulent flow[J]. AIAA Journal, 1982, 20(1): 79-85.
- [11] Girimaji S S, Abdol-Hamid K S. Partially-averaged Navier Stokes model for turbulence: implementation and validation[R]. AIAA 2005-502, 2005.
- [12] Girimaji S S. Partially-averaged Navier-Stokes model for turbulence: a Reynolds-averaged Navier-Stokes to direct numerical simulation bridging method[J]. Journal of Applied Mechanics, 2006, 73(3): 413-421.
- [13] Lakshminpathy S, Girimaji S S. Partially averaged Navier-Stokes (PANS) method for turbulence simulations: flow past a circular cylinder[J]. Journal of Fluids Engineering, 2010, 132: 121202. 1-121202. 9.
- [14] Lakshminpathy S, Reyes D A, Girimaji S S. Partially averaged Navier-Stokes method: modeling and simulation of low Reynolds number effects in flow past a circular cylinder[R]. AIAA 2011-3107, 2011.
- [15] Basu D, Hamed A, Das K. Assessment of partially averaged Navier-Stokes (PANS) multiscale model in transonic turbulent separated flows[C]//Proceedings of 5th Joint ASME/JSME Fluids Engineering Conference, San Diego, California: ASME, 2007: 1451-1459.
- [16] Krajnović S, Lárusson R, Basara B. Superiority of PANS

- compared to LES in predicting a rudimentary landing gear flow with affordable meshes[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2012, 37: 109-122.
- [17] Lakshmipathy S, Togiti V. Assessment of alternative formulations for the specific-dissipation rate in RANS and variable-resolution turbulence models[R]. AIAA 2011-3978, 2011.
- [18] Menter F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1598-1605.
- [19] Menter F R, Kuntz M, Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model[M] // Hanjalic' K, Nagano Y, Tummers M. Turbulence, heat and mass transfer 4. New York: Begell House, Incorporation, 2003.
- [20] Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows[R]. AIAA 2001-0879, 2001.
- [21] Baurle R A, Tam C J, Edwards J R, et al. Hybrid simulation approach for cavity flows: blending, algorithm, and boundary treatment issues[J]. AIAA Journal, 2003, 41(8): 1463-1489.
- [22] Fan C, Xiao X, Edwards J R, et al. Hybrid large-eddy/Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations of shock-separated flows[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2004, 41(6): 897-906.
- [23] Frendi A, Tosh A, Girimaji S. Flow past a backward-facing step: comparison of PANS, DES and URANS results with experiments[J]. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 2007, 8(1): 23-38.

(编辑:秦理曼)